Dans tout le problème, on se place dans $\mathbf{R}^m$ muni de sa structure euclidienne : étant donnés $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^m$, on note respectivement

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|y\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 \right)^{1/2}$$

leur produit scalaire et leur norme dans $\mathbf{R}^m$.

$\mathbf{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls.

Si φ est une fonction de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}$, différentiable en tout point, on note $d\varphi$ la fonction qui, à tout vecteur x de $\mathbf{R}^m$, associe la différentielle $d\varphi(x)$ de φ en x; on note, d'autre part, grad $\varphi(x)$ le vecteur de $\mathbf{R}^m$ dont les coordonnées sont les dérivées partielles de φ en x; on rappelle que $d\varphi(x)$ et grad $\varphi(x)$ sont liés par la formule :

$$\forall\, h \in \mathbf{R}^m \qquad d\varphi(x).h = \langle \operatorname{grad} \varphi(x),\, h \rangle .$$

On dira que φ est de classe C^p $(p \geqslant 1)$ si φ admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p.

On dira enfin qu'une fonction φ de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}$ est convexe si :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^m \qquad \forall\, y \in \mathbf{R}^m \qquad \forall\, \lambda \in [0, 1]$$

$$\varphi[\lambda x + (1 - \lambda) y] \leqslant \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \varphi(y).$$

La première partie traite de quelques résultats, préliminaires aux deux autres parties, concernant les fonctions convexes de classe C^1. Les parties II et III peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

I

Soit φ une fonction de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}$ convexe de classe C^1.

1° Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^m \quad \forall\, y \in \mathbf{R}^m \quad \varphi(y) \geqslant \varphi(x) + \langle \operatorname{grad} \varphi(x),\, y - x \rangle$$

(on pourra utiliser une fonction auxiliaire d'une variable réelle) et que, réciproquement, si un vecteur h de $\mathbf{R}^m$ vérifie

$$\forall\, y \in \mathbf{R}^m \quad \varphi(y) \geqslant \varphi(x) + \langle h,\, y - x \rangle ,$$

alors

$$h = \operatorname{grad} \varphi(x) .$$

2° Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^m \quad \forall\, y \in \mathbf{R}^m \quad \langle \operatorname{grad} \varphi(y) - \operatorname{grad} \varphi(x),\, y - x \rangle \geqslant 0 .$$

3° On considère, pour $r \geqslant 0$

$$K_r = \{ x \in \mathbf{R}^m ;\ \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i| \leqslant r \} \quad \text{et} \quad S_r = \{ x \in \mathbf{R}^m ;\ \forall\, i \ |x_i| = r \} .$$

Montrer que

$$\sup_{x \in K_r} \varphi(x) \leqslant \sup_{x \in S_r} \varphi(x).$$

(On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que tout point de K_r est barycentre de points de S_r affectés de coefficients positifs ou nuls.)

4° Si on suppose que φ est de classe C^2, montrer que, pour tout x de $\mathbf{R}^m$, la fonction

$$\xi \in \mathbf{R}^m \longmapsto \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant m} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

est une forme quadratique positive sur $\mathbf{R}^m$.

II

On fixe, dans cette partie, une fonction φ de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}$, convexe, de classe C^2 et vérifiant en outre

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^m \quad \varphi(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0 .$$

On se propose d'étudier les solutions de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad \frac{du}{dt} + (\operatorname{grad} \varphi) \circ u = 0.$$

Étant donné I intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, on dira que u est solution de (E) sur I si u est une fonction de I dans $\mathbf{R}^m$ dérivable et vérifiant

$$\forall\, t \in I \qquad \frac{du}{dt}(t) + \operatorname{grad} \varphi\left(u(t)\right) = 0.$$

1° Soit u une solution de (E) sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$; montrer que u est deux fois dérivable et que :

.../...

$$\forall\, t \in I \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2\right)(t) + \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant m}\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial x_j}\,\left(u\,(t)\right)\,\frac{du_i}{dt}\,(t)\,\frac{du_j}{dt}\,(t) = 0$$

(où, pour tout t, les nombres $u_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ désignent les composantes du vecteur $u\,(t)$ et où $\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2$ désigne la fonction $t \longmapsto \left\|\frac{du}{dt}\,(t)\right\|^2$).

En déduire que la fonction $t \longmapsto \left\|\frac{du}{dt}\,(t)\right\|$ est décroissante.

2° Montrer que, pour tout u_0 de $\mathbf{R}^m$, il existe une solution u de (E) définie sur un intervalle ouvert contenant $\mathbf{R}^+$ et vérifiant $u(0) = u_0$. (On pourra montrer d'abord que si v est une solution de (E) sur un intervalle ouvert d'extrémité droite $b < +\infty$, $v(t)$ admet une limite lorsque t tend vers b par valeurs inférieures, et que la fonction v ainsi prolongée par continuité en b est dérivable à gauche en b).

3° On se propose d'étudier le comportement, lorsque t tend vers $+\infty$, d'une solution u de (E) sur un intervalle ouvert contenant $\mathbf{R}^+$.

a. Montrer que la fonction $t \longmapsto \|\,u(t)\,\|$ est décroissante et que l'intégrale $\int_0^\infty \varphi\,[u\,(t)]\,dt$ est convergente.

b. Montrer que

$$\forall\, T \geqslant 0 \quad \int_0^T t\left\|\frac{du}{dt}\,(t)\right\|^2 dt + T\varphi\,[u\,(T)] = \int_0^T \varphi\,[u\,(t)]\,dt$$

et en déduire l'existence, dans $\mathbf{R}^+$, de

$$\sup_{t \geqslant 0}\left[t\left\|\frac{du}{dt}\,(t)\right\|\right].$$

c. Soit $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$ et telle que $\lim_{n \to \infty} u\,(t_n)$ existe. Notant α cette limite, montrer que

$$\operatorname{grad} \varphi\,(\alpha) = 0.$$

d. Soit v une solution de (E) sur un intervalle ouvert contenant $\mathbf{R}^+$; montrer que $t \longmapsto \|\,u\,(t) - v\,(t)\,\|$ est une fonction décroissante sur $\mathbf{R}^+$.

e. En déduire que $u(t)$ admet une limite u_∞ lorsque t tend vers $+\infty$ et que $\varphi\,(u_\infty) = 0$.

III

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}$, convexes, de classe C^1, telle que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^m \quad \varphi_n\,(x) \geqslant 0.$$

On suppose qu'il existe une fonction φ de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}$, de classe C^1, telle que

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^m \quad \lim_{n \to \infty} \varphi_n\,(x) = \varphi\,(x).$$

1° Montrer que, pour tout $r \geqslant 0$, il existe $C_r \geqslant 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^m \quad \|\,x\,\| \leqslant r \Rightarrow \varphi_n\,(x) \leqslant C_r.$$

2° Déduire de la question précédente que, pour tout $r \geqslant 0$, il existe $C'_r \geqslant 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^m \quad \|\,x\,\| \leqslant r \Rightarrow \|\operatorname{grad} \varphi_n\,(x)\,\| \leqslant C'_r.$$

3° Démontrer, en utilisant ce qui précède, que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers φ uniformément sur les parties bornées de $\mathbf{R}^m$.

4° Déduire de 2° et 3° que la suite $(\operatorname{grad} \varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\operatorname{grad} \varphi$ uniformément sur les parties bornées de $\mathbf{R}^m$.

(On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.)

5° On fait, dans cette question, l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$\exists\, c > 0 : \forall\, n \in \mathbf{N} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^m \quad \varphi_n\,(x) \geqslant c\,\|\,x\,\|^2.$$

a. Montrer que, f étant un élément de $\mathbf{R}^m$ fixé

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad \exists\, u_n \in \mathbf{R}^m \quad \operatorname{grad} \varphi_n\,(u_n) = f.$$

(On pourra considérer la fonction $x \longmapsto \varphi_n\,(x) - \langle f, x \rangle$ et montrer qu'elle admet un minimum).

b. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers u dans $\mathbf{R}^m$, u vérifie

$$\operatorname{grad} \varphi(u) = f.$$

c. En déduire, dans le cas où l'équation en u précédente admet au plus une solution, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente (on pourra commencer par démontrer que la suite est bornée).

d. Redémontrer directement ce résultat lorsque les fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont des formes quadratiques positives sur $\mathbf{R}^m$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail